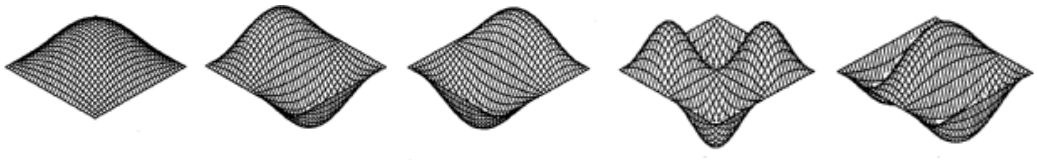
Kapitel 4: Zwei und dreidimensionale stehende Wellen

So wie schwingende Linien eindimensionale stehende Wellen bilden, können schwingende Flächen zweidimensionale stehende Wellen ausbilden. Eine solche schwingende Fläche kann zum Beispiel ein gespanntes Trommelfell sein. Gedanklich einfacher zu erfassen ist ein Trommelfell, das in einem quadratischen Rahmen eingespannt ist. Im Unterschied zur schwingenden Linie gibt es aber keine Knotenpunkte mehr, dafür Knotenlinien. Solche Knotenlinien sind sicher einmal die vier Seiten des Trommelrahmens, denn dort ist die Auslenkung immer Null. Bei der einfachsten möglichen Schwingung schwingt die Mitte des Trommelfells auf und ab. Legt man gedanklich ein x/y-Koordinatensystem durch die Trommel kann man einen Schwingungsbauch in x-Richtung, sowie in y-Richtung erkennen. Diese Schwingungsfunktion erhält das Symbol Ψ_{11} (Eins, Eins) weil in beiden Richtungen ein Schwingungsbauch vorkommt. Die Schwingung entspricht der Schwingung Ψ_1 einer eindimensionalen stehenden Welle.

Wiederum sind weitere stehende Wellen möglich, wenn in den beiden Raumrichtungen ein Vielfaches der halben Wellenlänge auf der zur Verfügung stehenden Strecke Platz findet. Weil nun die Zahl der Wellenberge/-täler in beiden Raumrichtungen variieren kann, treten mehrere stehende Wellen gleicher Energie auf. Sie werden als entartete Schwingungen bezeichnet.

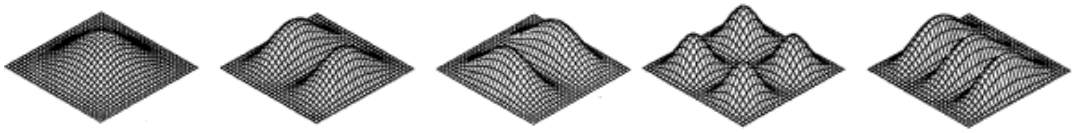
In der folgenden Bildsequenz sind die ersten fünf möglichen Schwingungen eines quadratischen Trommelfells dargestellt.



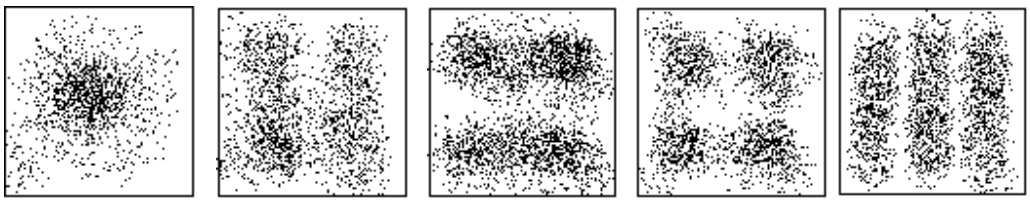
(entartete Schwingungen)

Es handelt sich um die Schwingungsfunktionen Ψ_{11}, Ψ_{21}, Ψ_{12}, Ψ_{22}, Ψ_{31}. (Die Indizes geben die Anzahl Berge bzw. Täler in der x-Richtung und in der y-Richtung wieder.) Es fällt auf, dass entartete Schwingungen auftreten, d.h. sie haben die gleichen Schwingungsfrequenzen, aber die Anzahl der Berge/Täler auf den beiden Achsen sind vertauscht.

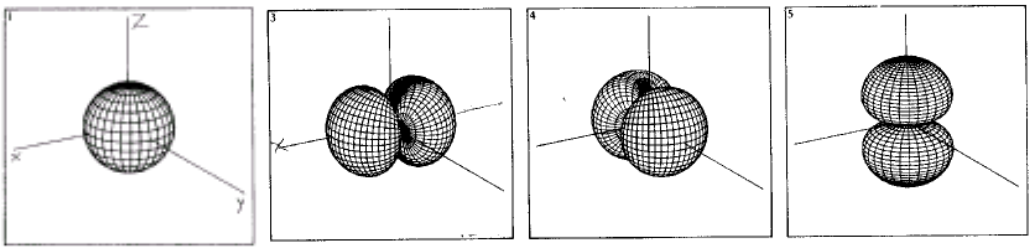
Auch diese Schwingungsfunktionen lassen sich quadrieren, wodurch alle Täler zu Bergen werden:



Für zweidimensionale Materiewellen lassen sich daraus wiederum die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten eines Teilchens ableiten. Uebersetzt in eine Punktedichteverteilungsgrafik ergibt sich für die fünf Schwingungsfunktionen folgendes Bild:



Es gibt auch dreidimensionale stehende Wellen. Es sind räumliche Schwingungen, welche nicht zwischen zwei Punkten (eindimensionale Schwingung) und nicht zwischen vier Seitenlinien (zweidimensionale Schwingung), sondern zwischen den sechs Seiten eines Würfels schwingen. Weil man zur grafischen Darstellung von Wellen jeweils eine Dimension zur Darstellung der Amplitude braucht, lassen sich schwingende Räume nicht mehr zeichnen. Sehr schön darstellen lassen sich aber die daraus abgeleiteten Gebiete mit einer gewissen Mindestaufenthaltswahrscheinlichkeit; die folgende Bildsequenz enthält die vier einfachsten räumlichen Schwingungen:

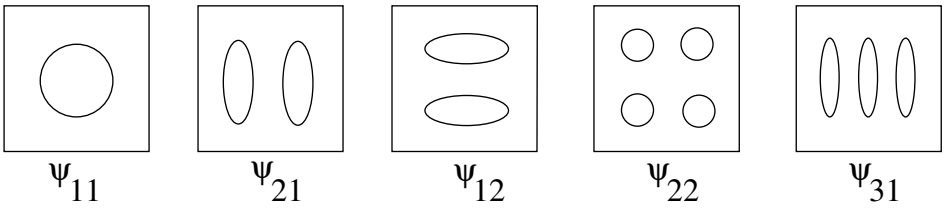


Fragen zu Kapitel 4

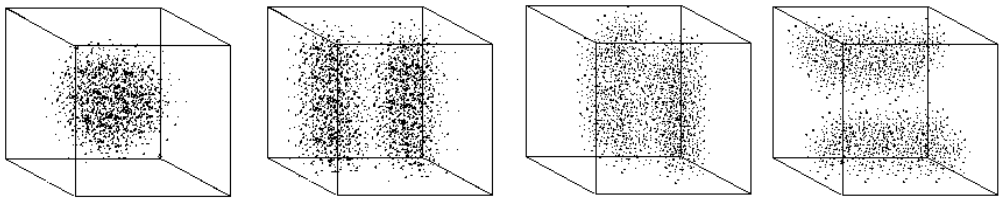
1. Zeichnen Sie fünf Quadrate und darin ungefähr diejenigen Gebiete, in denen die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten mehr als 1/2 des Amplitudenquadrates der fünf einfachsten 2-D Schwingungen betragen.
2. Zeichnen sie vier Würfel mit den Punktedichten der vier einfachsten dreidimensionalen Wellen.
3. Zählen Sie bei den vier einfachsten räumlichen Wellen die Anzahl Schwingungsbäuche in den drei Raumrichtungen x,y,z. Welche Indizes haben die dazugehörigen Wellenfunktionen Ψ?
4. Die schwingungslosen Orte (Knoten) von eindimensionalen stehenden Wellen sind punktförmig. Welcher Art sind sie bei zwei- und dreidimensionalen stehenden Wellen?
5. Wieviele entartete Schwingungen der Funktion Ψ_{211} existieren?
6. Wo kann man dreidimensional schwingende Wellen beobachten?

Antworten zu Kapitel 4

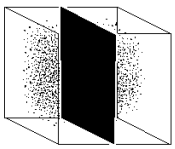
1.



2.



3. Im ersten Würfel trifft man in x-Richtung auf ein Gebiet mit erhöhter Punktedichte. D.h. die Wellenfunktion muss in dieser Richtung einen Berg oder ein Tal haben, der erste Index ist 1. Weil die Wellenfunktion kugelsymmetrisch ist gilt dies auch für die beiden anderen Raumrichtungen. Die Wellenfunktion hat also das Symbol Ψ_{111}. Im zweiten Würfel stösst man in x-Richtung auf zwei Gebiete mit erhöhter Punktedichte, in den beiden anderen Raumrichtungen nur auf je ein Gebiet. Die Wellenfunktion hat das Symbol Ψ_{211}. Im dritten Würfel treten die beiden Gebiete mit erhöhter Punktedichte in der y-Richtung auf, darum das Symbol Ψ_{121}. Der vierte Würfel hat in z-Richtung zwei Gebiete mit erhöhter Punktedichte d.h. Ψ_{112}.
4. Wie in Kapitel 4 bereits gesagt wurde handelt es sich bei zweidimensionalen stehenden Wellen um Knotenlinien. Bei dreidimensionalen stehenden Wellen sind es folglich Knotenflächen. Solche Knotenflächen sind einmal die sechs Seitenflächen des Würfels. Im Fall der Wellenfunktion z.B. kommt dazu eine vertikale Knotenfläche mitten durch den Würfel:



5. Wie aus 2. folgt sind es total 3. Nämlich Ψ_{211}, Ψ_{121}, und Ψ_{112}.
6. Solche Wellen sind nicht beobachtbar. Es wären schwingende Räume. Weil wir nur dreidimensional sehen können, können wir zwar den Raum sehen aber nicht noch wie er schwingt, dazu braucht es die vierte Dimension.